

# VERS LE THÉORÈME DU REMPAILLEUR DE CHAISES !

Recherche mathématique avec des élèves de cycle 3...

Extrait de « Chantiers Pédagogiques de l'Est - 1995 »

Michel BONNETIER  
École Karine Strasbourg, janvier 1995

Intéressés par les micro-machines (pour ceux qui ne connaissent pas, ce sont des voitures miniatures !) qui ont leur place dans notre musée scolaire, mes élèves, l'an dernier au CE2, ont proposé de construire des maquettes de circuits pour ces véhicules. Nous avons d'abord réalisé un noeud routier ordinaire, puis, à l'aide d'un livret de dessins géométriques, les « entrelacs », nous avons construit la maquette de l'échangeur sud de Strasbourg.

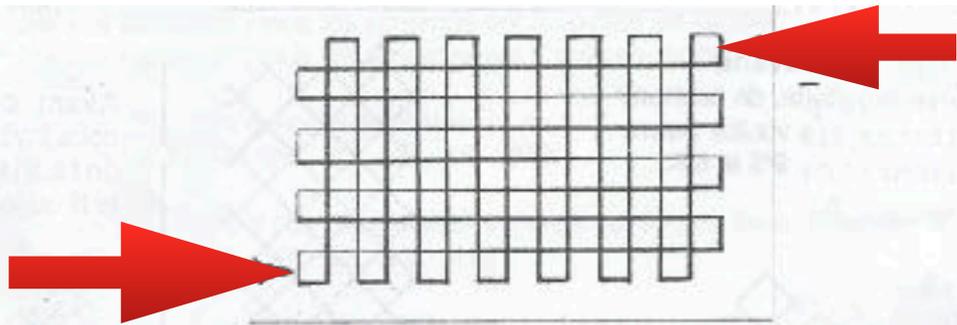
Ensuite nous nous sommes intéressés au « circuit sans fin ».

Et nous avons bien joué !



Cette année, au CM1, plusieurs élèves se posèrent des questions sur les grillages qui entourent la cour de l'école. « C'est comme des immenses circuits... »

Plus tard, nous avons fabriqué des petits tapis de laine, à l'aide de cadres d'ardoises (ardoises cassées) sur lesquelles nous avons planté des clous. Nos tapis avaient la forme suivante (simplifiée) :



Nous nous posions des questions quant à ces 2 petits carrés, sur la représentation schématisée ci-dessus, marqués d'une flèche. Nous n'arrivions pas à obtenir de tapis symétriques avec un carré aux quatre angles. Cela aurait été tellement plus joli !

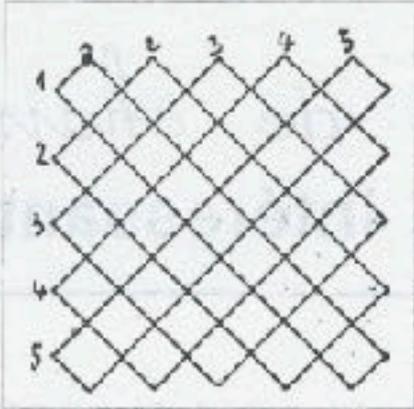
On proposa alors de voir ce que ça donnerait si, à la place des fils horizontaux et verticaux, on avait des fils « en diagonale », comme sur certaines chaises... ou comme sur les grillages !

Avant d'essayer de fabriquer nos nouveaux cadres à tapis, nous nous sommes lancés dans des travaux de dessins sur des feuilles à petits carreaux de 5 x 5 mm.

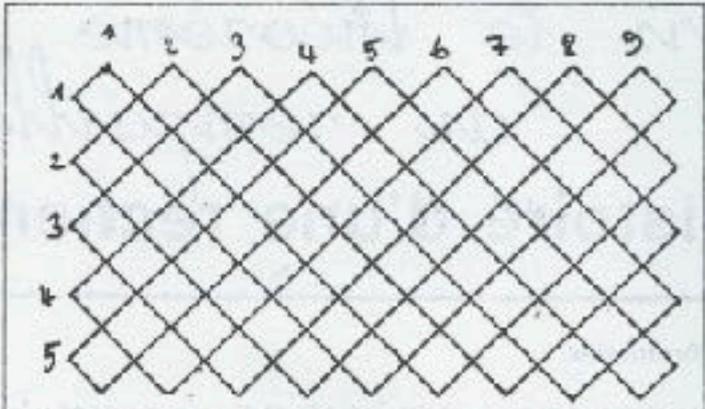
Nous tracions des « tapis » ou des « paillages de chaises » ou des « grillages » de forme carrée ou de forme rectangulaire.

Nous donnions un « nom » à chaque dessin. Par exemple, le 5/5 ou le le 9/5 (voir page suivante).

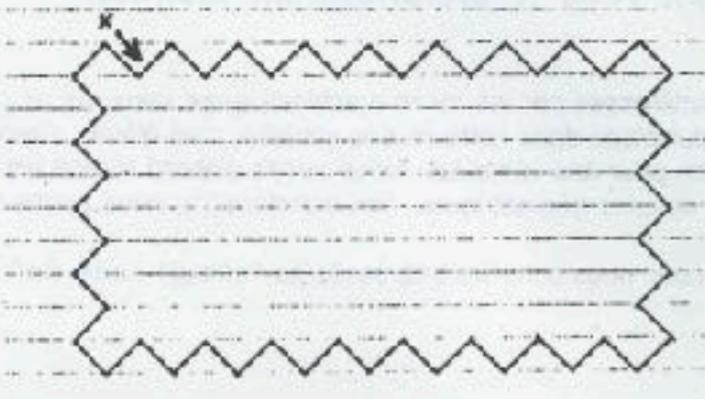
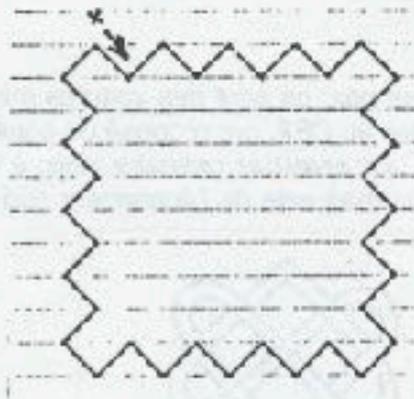
Voici un dessin de forme carrée que nous avons nommé 5/5



Ce dessin rectangulaire que nous avons nommé le « 9/5 » : 9 sommets sur la longueur et 5 sommets sur la largeur.



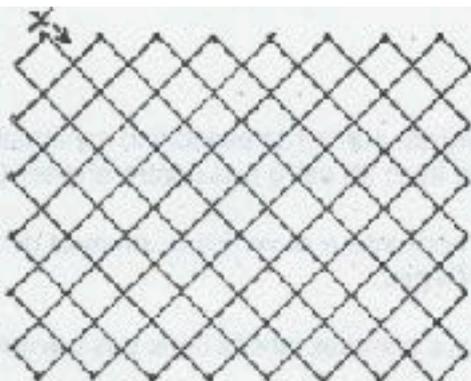
Pour faciliter les tracés, nous procédions par crantage, puis nous tracions les diagonales.



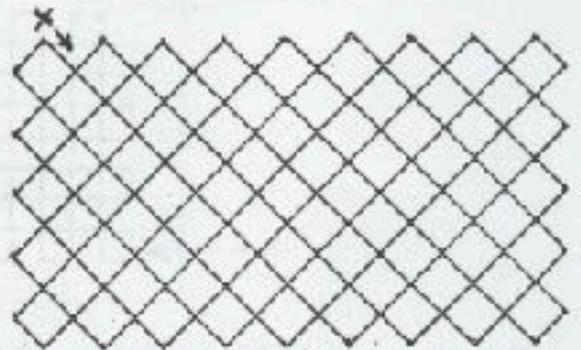
À l'aide de stylos feutres de couleur, nous repassons sur les diagonales afin de savoir si l'on avait besoin d'un ou plusieurs fils. Le point de départ étant le premier sommet à gauche (marqué « x ») et le sens du tracé marqué par une flèche.

Constat : pour un dessin 5/5, il faut 5 fils et pour le dessin « 9/5 », il ne faut qu' 1 fil !

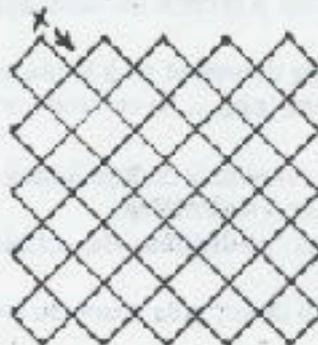
Avant de poursuivre plus avant, nous invitons le lecteur, la lectrice, à se munir de feutres de couleur et bien vouloir suivre le fil ou les fils des dessins 5/5, 9/5 et 6/8...



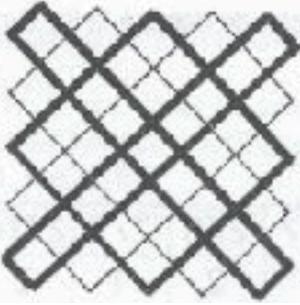
Pour le schéma 6/8, il faut 2 fils



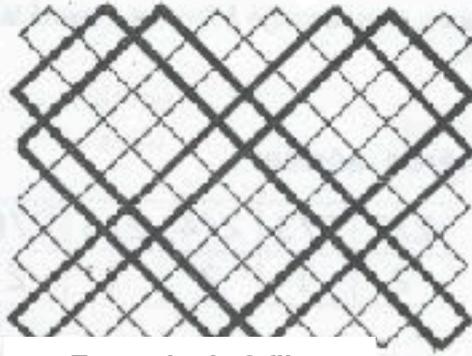
Pour le schéma 9/5, il faut 1 fil



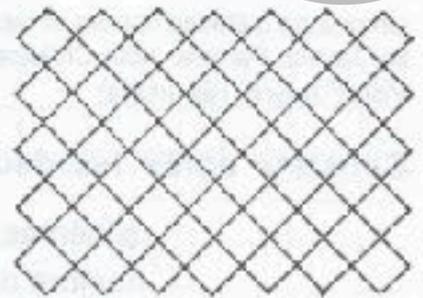
Pour le schéma 5/5, il faut 5 fils



Exemple de 5 fils



Exemple de 2 fils



Exemple de 1 fil

Forts de ce constat, nous substituant aux « rempailleurs de chaises », nous décidons d'en savoir plus. Imaginons un rempilleur parlant à ses fils !



Mes fils, vous devez savoir combien il vous faut de fils !



Un fil = un noeud !

C'est plus facile avec un seul fil !

Si le lecteur ou la lectrice perd le fil... qu'il ou elle en se décourage pas !

Nous nous sommes mis à simplifier le problème, il ne fallait pas nous aventurer dans toutes les directions mais essayer de travailler avec méthode.

**COMMENT REPRÉSENTER TOUS LES SCHÉMAS POSSIBLES JUSQU'AU CARRÉ 10/10 ?**

Nous avons rassemblé ces schémas dans des « familles ».

Dans la famille 2, tous les schémas ont 2 points en largeur

Dans la famille 3, tous les schémas ont 3 points en largeur

Dans la famille 4, tous les schémas ont 4 points en largeur etc...

Dans la famille « 2 », on a donc les schémas :  $2/2$   $2/3$   $2/4$   $2/5$   $2/6$   $2/7$   $2/8$   $2/9$   $2/10$

Dans la famille « 3 », il n'y a pas  $3/2$  puisqu'il est déjà présent dans la famille « 2 » avec  $2/3$ .

On a donc les schémas :  $3/3$   $3/4$   $3/5$   $3/6$   $3/7$   $3/8$   $3/9$   $3/10$

Dans la famille « 4 », on a les schémas :  $4/4$   $4/5$   $4/6$   $4/7$   $4/8$   $4/9$   $4/10$

et on continue ainsi avec les autres familles...

Chaque famille commence donc par un carré.

Nous avons trouvé les 45 schémas à représenter : c'est un peu comme des tris de dominos.

Toute la classe s'est lancée dans des tracés de carrés et de rectangles et ensuite dans les comptages de fils. Certains élèves disent encore des « chemins » en souvenir de nos circuits !

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	$2/2$	$2/3$	$2/4$	$2/5$	$2/6$	$2/7$	$2/8$	$2/9$	$2/10$
3		$3/3$	$3/4$	$3/5$	$3/6$	$3/7$	$3/8$	$3/9$	$3/10$
4			$4/4$	$4/5$	$4/6$	$4/7$	$4/8$	$4/9$	$4/10$
5				$5/5$	$5/6$	$5/7$	$5/8$	$5/9$	$5/10$
6					$6/6$	$6/7$	$6/8$	$6/9$	$6/10$
7						$7/7$	$7/8$	$7/9$	$7/10$
8							$8/8$	$8/9$	$8/10$
9								$9/9$	$9/10$
10									$10/10$



Nous pouvons dire à notre « père »,  
le rempailleur de chaises :

**1 /** C'est dans le système « CARRÉ »  
ou « RECTANGLE = 2, 3 ou 4 CARRÉS »  
qu'il faut utiliser le plus de fils.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2		2		2		2		2
3	3			3			3		
4	4					4			
5	5							5	
6	6								
7	7								
8	8								
9	9								
10	10								

**2 /** Dans le système « RECTANGLE »,  
il ne faut utiliser qu'un fil, une des deux mesures,  
L ou l, étant impaire.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2		1		1		1		1	
3			1	1		1	1		1
4				1		1		1	
5					1	1	1	1	
6						1		1	
7							1	1	1
8								1	
9									1
10									

**3 /** Dans le système « RECTANGLE »,  
il faut utiliser deux fils, lorsque les deux mesures,  
L et l, sont paires.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2		2		2		2		2
3									
4					2				2
5									
6							2		2
7									
8									2
9									
10									



**Bravo Fils !**  
**Vous n'avez qu'une seule erreur !**  
**Pour le rectangle 6/9... il y a 3 fils !**  
**Il ne devrait y en avoir qu'un,**  
**d'après votre règle n°2...**

Nous mîmes le nez sur notre erreur.  
Par la suite, il nous encouragea à élargir notre champ de recherches et nous travaillâmes  
dans le champ de 10 à 20 !

Nous travaillâmes dans le 10 et le 20

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2																			
	3																		
		4																	
			5																
				6															
					7														
						8													
							9												
								10											

Et nous pûmes, grâce aux nombreux constats, établir le relevé suivant, confirmant nos découvertes énoncés précédemment :

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
	3	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1
		4	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4
			5	5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5
				6	6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2	1	6	1	2
					7	7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1
						8	8	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4
							9	9	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	1
								10	10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10

Cependant, nous voyons mieux apparaître les liens avec les tables de multiplication :

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	2		2		2		2		2		2		2		2		2		2
	3	3			3			3			3			3			3		
		4	4				4				4				4				4
			5	5					5					5					5
				6	6						6						6		
					7	7							7						
						8	8								8				
							9	9									9		
									10	10									10

Et surtout, nouvelle découverte, les liens avec les « moitiés de tables » : 4/6 6/9 8/12 10/15 etc... (voir tableau page 7)

Encore au CM1; il nous a été difficile de transformer ces découvertes en théorème !

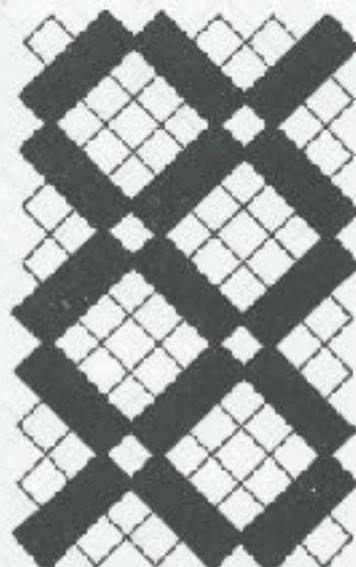
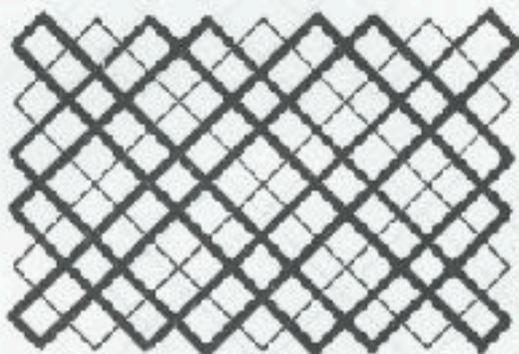
Nous laissons cela aux spécialistes.

Notre recherche nous a suffi.

Et puis, nous venons de découvrir de nouveaux espaces géométriques.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2																			
3																			
4	4		2		4		2		4		2		4		2		4		
5																			
6	6			3			6			3			6						
7																			
8	8				4					8									4
9																			
10	10												5						10

Et puis nous venons de découvrir de nouveaux espaces géométriques :



Alors :



Ça vous a plu ?  
Et si vous cherchiez du côté  
des chaises percées ?



1 fil ? 2 fils ?  
3 ou 4 fils ?

De la chaise percée  
à la tresse celtique,  
il n'y a ... qu'un fil !



## *vers le théorème du rempilleur de chaises...*

Michel Bonnetier :

« Le traçage de ces lignes en diagonales demande aux élèves beaucoup de temps. Aussi, pour ces nombreuses recherches sur le nombre de fils nécessaires, j'ai mis à leur disposition des photocopies des tracés. En voici une page, celle de la famille « 5 » (5 sommets sur la largeur) »

